五種正多面體

069 為甚麼正多面體只有 5 種？

因為只有 5 種正多面體符合歐拉公式。

在平面上，不僅有正三角形、正方形、正五邊形，還有一般的正 n 邊形（$n=6$，7，8，…）。但是，到了三維空間，**正多面體**（每個面都是相同的正多邊形的多面體）卻只有五種：**正四面體**、**正六面體**、**正八面體**、**正十二面體**和**正二十面體**。在西方它們被稱為**柏拉圖立體**。這一結果與平面多邊形的結果大不相同，這是為甚麼呢？

其實，只要利用 n 邊形的**內角**和公式，就可以簡單地證明這個結論。為此，讓我們把目光集中到一個**頂點**處：如果正多面體的一個頂點處圍聚了 m 個正 n 邊形，由於正 n 邊形的一個內角為 $\frac{n-2}{n}\pi$，該頂點處（凸起）的周角為 $m\frac{n-2}{n}\pi<2\pi$，由此可以知道 $(m-2)(n-2)<4$。這樣，(m,n) 以及正多面體的情況只能有以下 5 種：

$(m,n)=(3,3)$，對應正四面體；
$(m,n)=(3,4)$，對應正六面體；
$(m,n)=(4,3)$，對應正八面體；
$(m,n)=(3,5)$，對應正十二面體；
$(m,n)=(5,3)$，對應正二十面體。

其中正四、八、二十面體的各面是正三角形；正六面體的各面是正方形；正十二面體的各面是正五邊形。

那麼，為甚麼 $(m,n)=(3,3)$，$(3,4)$，$(4,3)$，$(3,5)$ 和 $(5,3)$ 正好分別對應正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體和正二十面體呢？對此，利用著名的**歐拉公式**（以歐拉命名的公式很多，這是其中之一）就可回答這個問題。記上述多面體的**面**數為 f，**棱**數為 e，頂點數為 v，則歐拉公式為：

$$f-e+v=2$$

如果一個正多面體的每個面是正 n 邊形，每個頂點處有 m 條棱相交於此，則每一個頂點被 m 條棱共用，每條棱被 2 個面共用，而每個面有 n 個頂點。容易得出，面數 f、棱數 e、頂點數 v 與 m、n 具有關係 $nf=mv=2e$，再利用歐拉公式，對給定的 n、m，就能求出 f、e、v。比如當 $(m,n)=(3,3)$ 時，可得到 $f=4$、$e=6$ 以及 $v=4$。它表明這是一個四面體，有 6 條棱、4 個頂點。我們也可直接利用歐拉公式證明正多面體只有 5 種。

歐拉公式是歐拉在 1750 年發現的，它不僅適用於正多面體，而且適用於一般的簡單多面體。假如上面的正多面體是用橡皮做的空心多面體，則在其內吹氣可以讓它們都成一個球面，或者說它們都可以連續變形為一個球面，所有可以連續變形為一個球面的多面體稱為簡單多面體。對簡單多面體，歐拉公式 $f-e+v=2$ 均成立。歐拉公式的證明其實也不複雜：把一個簡單多面體的一個面去掉後，可以把它展開為一個平面網絡圖形（見圖 1），它的外圍圍成一個多邊形，上圖是正十二面體去掉一個面後展開的圖形。現在我們拿掉在外圍多邊形內部的一個頂點，同時拿掉和這個頂點相連的所有 m 條棱（現在只能稱為邊），這樣圍在這個頂點周圍的 m 個面合併成一個面，也就是少了 $m-1$ 個面。這樣，少掉的邊數等於少掉的面數和頂點數之和，因此，$f-e+v$ 的值並沒有改變。逐次拿掉外圍多邊形內部的所有頂點及相鄰的邊，$f-e+v$ 都不會改變，最後的圖形變成只剩下外圍的多邊形（見圖 2），它的頂點數和邊數一樣多，而內部只有一個面，因此得到 $f-e+v=1$，加上一開始去掉的一個面就得到了歐拉公式 $f-e+v=2$。（張文俊）

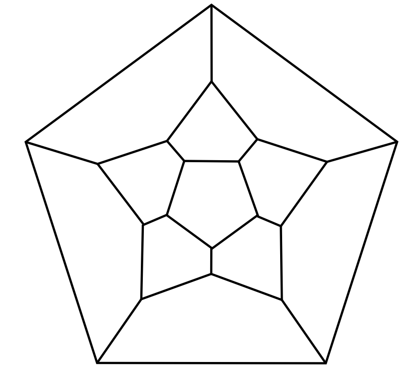


圖 1：正十二面體去掉一個面後展開的平面網絡圖形

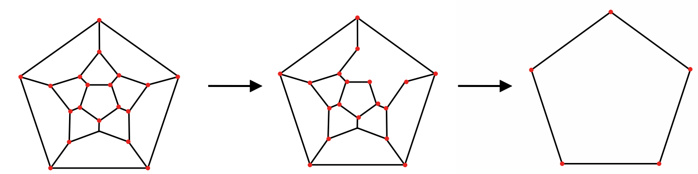
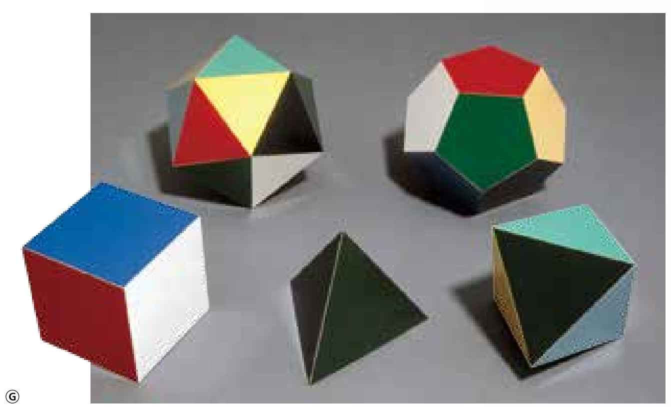
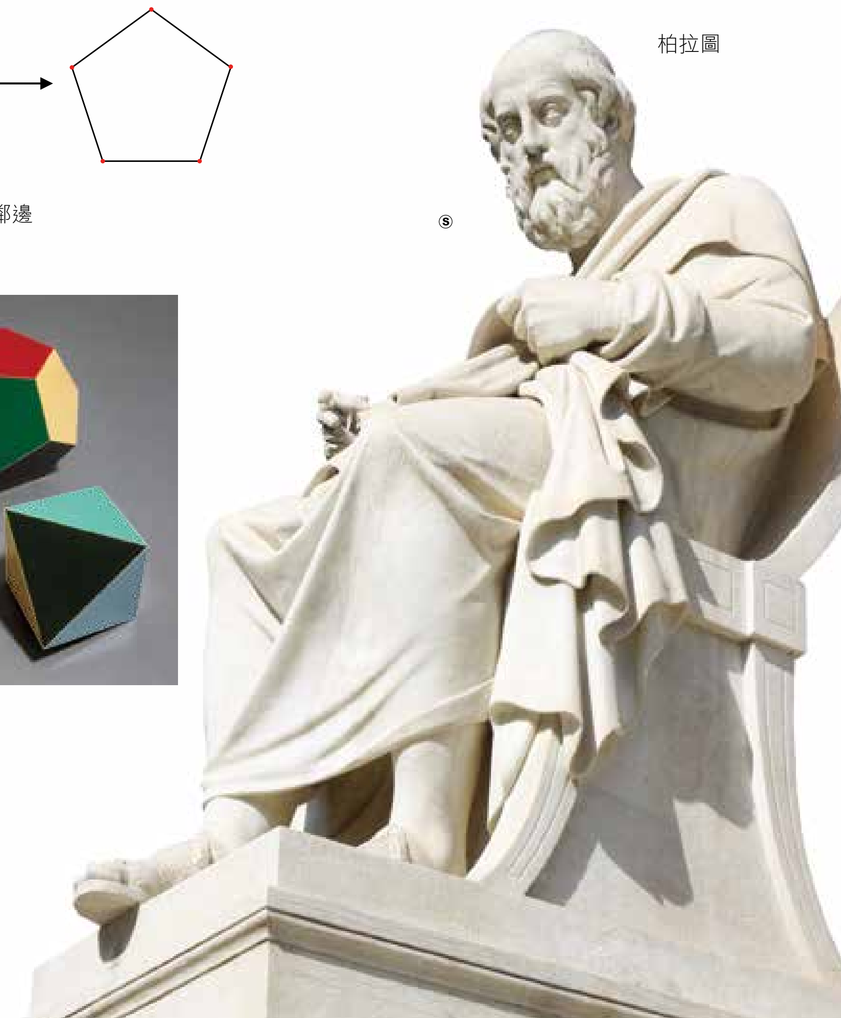


圖 2：逐次拿掉外圍多邊形內部的所有頂點及鄰邊




柏拉圖